ПРИДНЕСТРОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

им. Т.Г. Шевченко

Физико-математический факультет

Кафедра математического анализа и приложений

**ПОДГОТОВКА**

**К ГОСУДАРСТВЕННОМУ ЭКЗАМЕНУ**

**ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ**

**И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯМ**

**Методические рекомендации**

Тирасполь – 2016

**УДК 517(072.8)**

**ББК В161.р30**

**П44**

***Составители:***

**Ю.А. Баренгольц**, к. ф-м. наук, доцент, зав. кафедрой математического анализа и приложений ПГУ им. Т.Г. Шевченко;

**В.В. Афонин,** ст. преподаватель кафедры математического анализа и приложений ПГУ им. Т.Г. Шевченко;

**Г.И. Ворническу,** доцент кафедры математического анализа и приложений ПГУ им. Т.Г. Шевченко;

**Р.Л. Косиева,** ст. преподаватель кафедры математического анализа и приложений ПГУ им. Т.Г. Шевченко

*Рецензенты:*

**Ю.А. Долгов,** д. т. н., профессор инженерно-технического института ПГУ им. Т.Г. Шевченко

**О.Ф. Васильева**, ст. преподаватель кафедры общей и теоретической физики ПГУ им. Т.Г. Шевченко

**Подготовка к государственному экзамену по математическому анализу и его приложениям**. Методические рекомендации / Сост.: Ю.А. Баренгольц, В.В. Афонин, Г.И. Ворническу, Р.Л. Косиева – Тирасполь, 2016.– 67с.

*В работе приведен теоретический материал и примеры решения практической части вопросов государственного экзамена по высшей математике для студентов физико-математического факультета ПГУ.*

*При составлении методических рекомендаций учтены требования Федерального Государственного образовательного стандарта высшего образования третьего поколения по направлениям 01.03.01 «Математика», 01.03.04 «Прикладная математика» и 01.03.02 «Прикладная математика и информатика».*

**УДК 517(072.8)**

**ББК В161.р30**

**П44**

Рекомендовано Научно-методическим советом ПГУ им. Т.Г. Шевченко

© Ю.А. Баренгольц, В.В. Афонин, Г.И. Ворническу, Р.Л. Косиева, составление, 2016

**ОГЛАВЛЕНИЕ**

Введение 4

Вопросы по математическому анализу 5

Вопросы по дифференциальным уравнениям 35

Вопросы по теории функций комплексного переменного 47

Литература 63

**Введение**

В связи с внедрением новых федеральных государственных образовательных стандартов, предусматривающих две ступени высшего образования – бакалавриат и магистратуру, изменились требования к государственной аттестации выпускников. Наиболее значимыми изменениями являются требования практической направленности обучения и, как следствие, государственной аттестации.

Данные методические рекомендации предназначены для подготовки выпускников-бакалавров к государственному экзамену. В работу включены теоретические вопросы и практические задания по следующим разделам: «Математический анализ», «Дифференциальные уравнения», «Теория функций комплексного переменного».

Работа содержит вопросы, включенные в экзаменационные билеты по каждой из перечисленных дисциплин, и ответы на эти вопросы: для каждого – теоретическая часть, а также практическая часть – задача, решение которой опирается на сформулированные теоретические положения. Также в работе приведены задания для самостоятельного решения и ответы к ним.

Пособие предназначено для выпускников направлений «Математика», «Прикладная математика», «Прикладная математика и информатика». Авторы надеются, что данное пособие поможет выпускникам физико-математического факультета (не только перечисленных направлений) подготовиться и успешно сдать государственный экзамен.

Как справедливо отметили рецензенты, предлагаемые методические указания могут оказаться полезными и для выпускников других факультетов, на которых уделяется достаточно большое внимание изучению вопросов высшей математики, и которые перешли на обучение по образовательным стандартам ФГОС3+.

**I. ВОПРОСЫ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ**

**1. Экстремум функции одной переменной. Необходимое и достаточное условие экстремума функции одной переменной.**

**Решить задачу с физическим или геометрическим содержанием на нахождение экстремума функции.**

Функция  имеет максимум в точке,если значение функции в этой точке больше, чем ее значения во всех точках, достаточно близких . Иначе: функция имеет максимум в точке, если  для любых

Функция имеет минимум в точке, если значение функции в этой точке больше, чем ее значения во всех точках, достаточно близких. Иначе: функция имеет минимум в точке, если для любых 

Необходимое условие экстремума:

Функция  в точке имеет экстремум (максимум или минимум), если функция определена в двухсторонней окрестности точкии для всех точек  некоторой области выполнено соответственно неравенство (в случае максимума) или  (в случае минимума).

Функция может иметь экстремум только в тех точках, которые лежат внутри области определения функции и где ее производная равна 0 или не существует.

Достаточное условие экстремума

1) Если функция непрерывна в точке и некоторой ее окрестности, дифференцируема в рассматриваемой окрестности,кроме, быть может, самой точки, и ее производная при переходе через точку меняет знак с плюса на минус, то функция имеет максимум в точке; если же производная при переходе через точку меняет знак с минуса на плюс, то вточке имеет минимум.

2) Точка есть точка экстремума функции, если, причем если, то точка – точка максимума, если, то точка – точка минимума.

Во многих геометрических, физических и технических задачах требуется найти наибольшее и наименьшее значение величины, связанной функциональной зависимостью с другой величиной.

Для решения такой задачи, исходя из ее условия, следует

1. выбрать независимую переменную, наибольшее или наименьшее значение полученной функции.

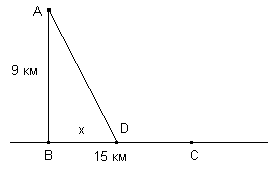
2) выразить исследуемую величину через эту переменную,

3) найти искомое

*Задача.* Буровая вышка расположена в поле в 9 км от ближайшей точки шоссе. С буровой надо направить курьера в населенный пункт, расположенный по шоссе в 15 км от упомянутой точки по шоссе (считая шоссе прямой линией). Если курьер на велосипеде проезжал по полю 8 км/ч, а по шоссе 10 км/ч, то в какой точке шоссе ему надо ехать, чтобы в кратчайшее время достичь населённого пункта.

*Решение.*

Запишем краткое условие задачи и выполним чертеж.

Дано:



Найти: 

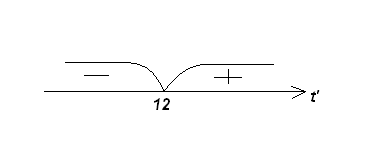
Пусть 

Из, , , 

Находим функцию времени

Находим производную 

Находим критические точки функции

Убедимся, что точка является точкой минимума функции

точка минимума.

*Ответ:*

**Задачи для самостоятельного решения**

1. Найти стороны прямоугольника наибольшего периметра, вписанного в полуокружность радиуса R. *Ответ:*

2. Найти высоту цилиндра наибольшего объема, который можно вписать в шар радиуса R.

*Ответ:*

3. Найти высоту конуса наибольшего объема, который можно вписать в шар радиуса R.

*Ответ:*

**2. Определенный интеграл. Формула Ньютона-Лейбница. Вычисление площадей фигур.**

**Вычислить площадь фигуры, ограниченной заданными линиями.**

Предположим на [*a*, *b*] задана ограниченная функция .Разбиваем [*a*, *b*] произвольным образом на *n* частей.

; ; ; …;  – точки деления..

На каждом из полученных отрезков произвольным образом выбираем по точке *ξi*, . Строим сумму (сигма):

.

Эта сумма называется интегральной.

Обозначаем . Рассматриваем

.

Если такой предел существует и не зависит от способа разбиения отрезка на части, и не зависит от способа выбора точек *ξi*, то его значение называется определённым интегралом от функции  на [*a*, *b*] и записывается:

.

*Замечание:* определённый интеграл имеет множество приложений и что необходимое условие существования определённого интеграла функции  на отрезке [*a*, *b*] заключается в том, чтобы функция была ограничена на этом отрезке.

Для вычисления определенного интеграла используется формула Ньютона-Лейбница:

,

где  – одна из первообразных .

Вычислим площадь криволинейной трапеции, т.е. фигуры, ограниченной , ,  и 

*x*

*y*

*a*

*b*



*x*1

*x*2

*x*3

*x*4

Разбиваем [*a*, *b*] произвольным образом на *n* частей: ; ; ; …; (точки деления).

На каждом из полученных отрезков  произвольным образом выбираем по точке, обозначим: , 

Очевидно, что Последнее равенство тем точнее, чем на более мелкие части разбит [*a*, *b*].



В случае, когда фигура ограничена линиями

*a*

*x*

*y*





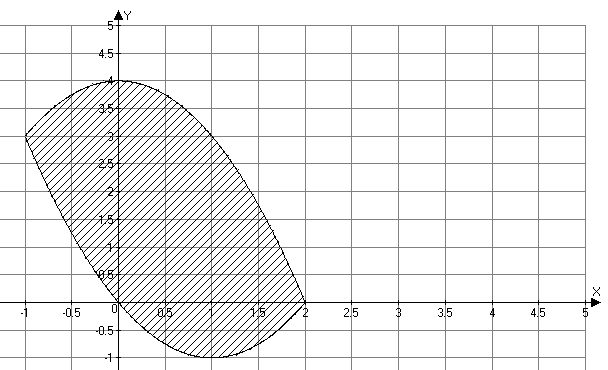
, , , ;  и выполняется условие





*Задача.*Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболами: и

*Решение*. Выполним чертеж.





Находим искомую площадь:



*Ответ:* 15.

**Задачи для самостоятельного решения**

1) Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболами и*Ответ:*

2) Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболами и*Ответ:*

3) Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболами и*Ответ:*

**3.Определение ряда и его сходимости.** Ряд **Тейлора. Ряд Маклорена. Разложение основных элементарных функций в ряд Маклорена.**

**Используя разложения в ряд, вычислить приближенное значение определенного интеграла, взяв три члена разложения подынтегральной функции. Указать погрешность.**

Предположим, задана некоторая числовая последовательность  
Из членов этой последовательности составим следующий символ

(1)

Для нахождения суммы ряда рассмотрим вспомогательные суммы:

, ,

которые назовем частичными суммами ряда.

Рассмотрим последовательность, составленную из этих частичных сумм. Очевидно, что n- ая частичная сумма охватывает все больше и больше членов ряда (1) и при

будет стремиться к сумме этого ряда.

*Определение:* Числовой ряд (1) называется сходящимся, если существует и конечен предел последовательности его частичных сумм.

*Ряд Тейлора* для функции в окрестности точкиимеет вид:

 Если в равенстве полагаем , то полученное равенство называется рядом Маклорена и примет вид:

,

где– остаточный член формулы Маклорена

Запишем разложения основных элементарных функций в ряд Маклорена:













*Пример.*С помощью рядов вычислить с точностью до 0,0001 приближенное значение интеграла

*Решение.*Разложим подынтегральную функцию в биномиальный ряд, полагая в нем:



Этот ряд сходится к биномуприИнтегрируя в пределах от 0 донайдем



Вычислим несколько последовательных первых членов полученного знакочередующегося сходящегося ряда ( с одним лишним знаком): 

Согласно свойству знакочередующегося сходящегося ряда для вычисления с точностью до 0,0001 достаточно взять сумму двух первых членов ряда.



Ошибка этого приближенного значения меньше абсолютного значения первого из отброшенных членов ряда, т.е. меньше

*Ответ:*

**Задачи для самостоятельного решения**

1. С помощью разложения подынтегральной функции в ряд вычислить с точностью до 0,001 интеграл *Ответ:*

2. С помощью разложения подынтегральной функции в ряд вычислить с точностью до 0,001 интеграл. *Ответ:*

3. С помощью разложения подынтегральной функции в ряд вычислить с точностью до 0,001 интеграл. *Ответ:*

**4. Дифференциал функции одной переменной. Приближенное вычисление значений функции посредством дифференциала.**

**Вычислить приближенное значение заданной функции, заменяя приращение функции ее дифференциалом.**

Дифференциал функции – это главная линейная относительно часть приращения функции. Формально это «почти то же самое, что и производная». Производная функции чаще всего обозначается. Дифференциал функции обозначается .Дифференциал функции одной переменной записывается в следующем виде:



Другой вариант записи: 

Дифференциал функции одной переменной чаще всего используют для приближенных вычислений. Для нахождения приближенного значения функции используют формулу:

 или 

*Пример.* Вычислить приближенно с помощью дифференциала .

*Решение.* Предполагаем, возьмём 

Используем формулу для приближенного вычисления



Находим 





*Ответ:*.

**Задачи для самостоятельного решения**

1) Вычислить приближенно . *Ответ:* 0,795.

2) Вычислить приближенно . *Ответ:* 0,770.

3) Вычислить приближенно . *Ответ:*  0,52164.

**5. Интегрирование по частям. Интегрирование выражений вида , где**

**.**

**Найти заданный интеграл.**

Формула интегрирования по частям основана на правиле нахождения дифференциала произведения двух функций

.

Интегрируя обе части, получаем:

 – *формула интегрирования по частям*

1) Интегралы вида ,

где  – полином степени *n*,  – обратная тригонометрическая функция или логарифм. В таких интегралах всегда полагают:

 и .

Таким образом, можно перейти от трансцендентных функций к рациональным или иррациональным, учитывая значения дифференциалов –

, , 

, 

2) Интегралы вида

, , .

В таких случаях



 или или.

 или или

При необходимости интегрирование по частям повторяют.

*Пример.*Найти интеграл

*Решение.*Пусть тогда



Используя формулу интегрирования по частям, получаем



*Ответ:*

**Примеры для самостоятельного решения**

1. Найти интеграл *Ответ:*

2. Найти интеграл *Ответ:*

3. Найти интеграл *Ответ:*

**6.Экстремум функции нескольких переменных. Необходимое и достаточное условие экстремума для случая функции двух переменных.**

**Исследовать на экстремум заданную функцию**

Предположим, задана функция нескольких переменных .

*Определение*. Точка с координатами  называется точкой локального максимума функции , если существует такая окрестность этой точки , что для всех точек с координатами 

 справедливо неравенство .

*Определение*. Точка с координатами  называется точкой локального минимума функции , если существует такая окрестность этой точки , что для всех точек с координатами  справедливо неравенство 

*Необходимые условия экстремума*

Для того, чтобы в точке  был экстремум функции нескольких переменных , необходимо, чтобы выполнялись равенства: 

(1)

*Достаточные условия экстремума*

Если ,, то

при справедливости  точка  является точкой минимума,

при справедливости  точка  является точкой максимума.

Если же ,  то точка

с координатами являетсяседловойточкой.

Если  то вопрос об экстремуме остается открытым и необходимо дополнительное исследование вблизи точки .

*Пример.*Исследовать на экстремум функцию .

*Решение.*Найдем частные производные 1-го порядка.

, 

Согласно необходимым условиям экстремума получаем систему уравнений



Решив систему уравнений, найдем все стационарные точки



Вычислим частные производные второго порядка:

.

Проверим выполнение достаточных условий локального экстремума в каждой из точек.

.

Т.к. , то  – точка строгого локального минимума.

.

Т.к. , то  – точка строгого локального максимума.

.

Т.к. , то  не является точкой локального экстремума.

.

Т.к. , то  не является точкой локального экстремума.

*Ответ:* – точка строгого локального минимума,  – точка строгого локального максимума.

**Примеры для самостоятельного решения**

1. Исследовать на экстремум функцию . *Ответ:*.

2. Исследовать на экстремум функцию . *Ответ:* 

3. Исследовать на экстремум функцию . *Ответ:*

7**. Замена переменных в двойном интеграле. Полярные координаты.**

**Вычислить площадь заданной фигуры.**

Рассмотрим .

Предположим, что в переменных *x* и *y* этот интеграл вычислять очень трудно, тогда возникает необходимость выразить этот интеграл в других переменных, в которых этот интеграл вычислялся бы легче. Нужно сделать замену переменных.

Предположим, что переменные *x* и *y* изменяются согласно формулам

(1)

Обозначим *D′* – прообраз области *D,D* – образ области *D’.*

Если (1) –регулярное отображение и если, образ области *D* кривыми разбит на *n* частей, то в силу (1) и образ *D*′ кривыми разбит на*n* частей.

Обозначим λ - наибольший диаметр частей области *D*, *d* – наибольший диаметр частей области *D′*

*x(u;v) y(u;v)*

λ→0 *d*→0

Если*S1,S2,…Sn*– площади частей *D,S′1,S′2,…Sn* – площади частей *D′,* то на основе определения двойного интеграла имеем





То есть получено равенство:

 (2)

Уравнение (2) выражает формулу замены переменных в двойном интеграле

Выразим теперь двойной интеграл в полярных координатах. Как известно, декартовые координаты с полярными координатами одной и той же точки связаны следующем образом:

. (3)

Определитель Якоби этого отображения



= (4)

С учетом равенств (3) и (4) уравнение (2) примет вид:

 – двойной интеграл в полярных координатах.

*Пример.*Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми , , , .

*Решение.*Рассмотрим кривые, ограничивающие фигуру:

 – уравнение окружности с центром  радиуса 1.

 – уравнение окружности с центром  радиуса 3.

 – прямая, образующая с осью угол 

Запишем, уравнения кривых в полярных координатах :

, , учитывая уравнения прямых.

Площадь фигуры, ограниченной кривыми в полярных координатах , вычисляется по формуле:



Применим формулу понижения степени и получим



*Ответ:*.

**Примеры для самостоятельного решения**

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой.*Ответ:*.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой *Ответ:*

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми *Ответ:*

**8. Интегрирование выражений, содержащих радикалы от линейных функций.**

**Найти предложенный интеграл.**

1) Интегралы вида, где *R–* рациональная функция.

Если *k* – общий знаменатель дробей , то делают подстановку

,

которая приводит к интегралу от рациональной функции.

2)Интегралы вида.

Используется подстановка.

Тогда

.

В результате вновь приходим к интегралу от рациональной функции



*Пример.*Найти неопределенный интеграл



*Решение.* Поскольку в подынтегральной функции содержатся радикалы 5 и 2 степеней, то в качестве замены возьмем , . Подставим в интеграл и получим:

 (1)

Разложим подынтегральную функцию на простые дроби с неопределенными коэффициентами.



Умножив левую и правую части на общий знаменатель дробей, получим равенство двух многочленов.



Раскрыв скобки в левой части и учитывая равенство коэффициентов двух многочленов получим систему пяти уравнений с пятью неизвестными.



Запишем в формулу (1)





Вернемся к исходному аргументу



*Ответ:*

*Пример.*

*Решение.*Подстановка: . Тогда, и *dx = tdt*.

В результате,



**Задачи для самостоятельного решения**

1. . *Ответ:*.

2. 

*Ответ:*

3. **.

*Ответ:*.

**9. Исследование поведения функции. Исследование на монотонность, выпуклость, асимптоты и построение графика функции.**

Чтобы исследовать функцию на монотонность, необходимо найти первую производную. Определить точки, в которых она равна нулю или не существует (т.е. критические точки), исследовать знак производной на полученных промежутках. Функция возрастает на промежутках, где производная положительна и убывает на промежутках, где производная отрицательна.

Чтобы исследовать функцию на выпуклость, необходимо найти вторую производную. Определить точки, в которых она равна нулю или не существует, исследовать знак второй производной на полученных промежутках. График функции выпуклый на промежутках, где вторая производная отрицательна и вогнутый, где вторая производная положительна.

Асимптоты находим по формуле:, где



*Пример.*Исследовать на монотонность, выпуклость, асимптоты и построить график функции.



*Решение.*

1) Находим интервалы монотонности функции, экстремумы. Для этого найдем первую производную и точки, в которых она равна нулю, либо не существует



,  не существует при *x=*0 *и x=*1

>0 на промежутках . На этих промежутках функция возрастает.

<0 на промежутке. На этом промежутке функция убывает.

Найдем . Итак точка  является точкой максимума

2) Найдем интервалы выпуклости и вогнутости функции, точки перегиба. Для этого находим вторую производную функции и точки, в которых она равна нулю, либо не существует



Применяем метод логарифмического дифференцирования, обозначим



Тогда .

Дифференцируем обе части равенства, получим:





Следовательно,



Теперь, приравнивая вторую производную функции к нулю, находим точки перегиба функции и точки, в которых вторая производная функции равна нулю или не существует:



 не существует при , , ,

Итак, точки , и  – точки перегиба.

График функции выпуклый на промежутках и .

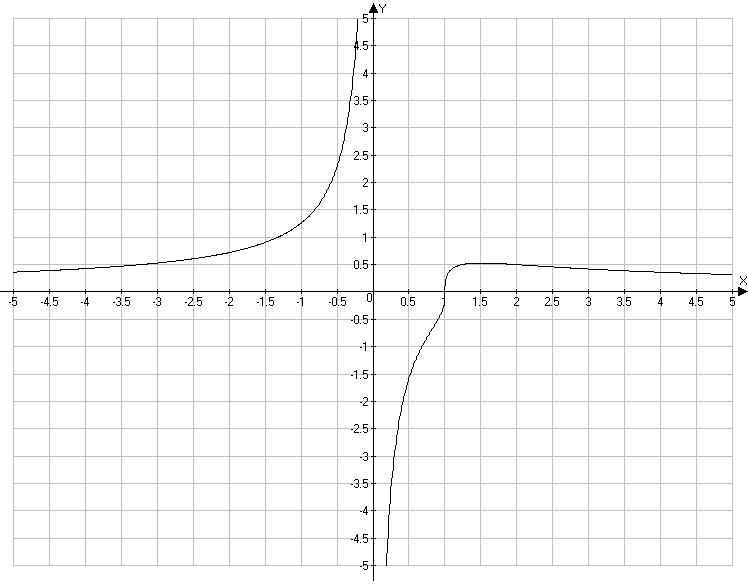
График функции вогнутый на промежутках , и 

3. Находим наклонную асимптоту 



- наклонная асимптота.

4. Строим график.



**Задачи для самостоятельного решения**

1. Исследовать на монотонность, выпуклость, асимптоты и построить график функции

.*Ответ:*максимум минимумперегиб в точкахасимптота

2. Исследовать на монотонность, выпуклость, асимптоты и построить график функции.

.*Ответ:*экстремумов нет, перегиб в асимптоты 

3. Исследовать на монотонность, выпуклость, асимптоты и построить график функции.

*Ответ:* максимумминимумов нет, перегибов нет, асимптоты

**10. Интегрирование тригонометрических функций.**

**Найти заданный интеграл**.

1) Интегрирование нечётной степени  или .

Используется основное тригонометрическое тождество и введение неизвестного под знак дифференциала.

Например,

.

2) Интегрирование чётной степени  или .

Используются формулы понижения степени тригонометрических функций:



Например,

.

3) Интегралы вида; ;.

Используются тригонометрические формулы

,

,

.

Например,



4), где  – рациональная или дробно-рациональная функция от sin*x* или cos*x*.

Используем замену:

; ; ; ;.

5) Общий случай ****

Такие интегралы приводятся к интегралам от рациональных функций с помощью *универсальной подстановки*



Тогда

, , ,

В результате, 

Например, .

Подстановка: , , .

Тогда



*Пример.*Найти интеграл.

*Решение.*Выполняем универсальную подстановку:

, , .

*Ответ:*

**II. ВОПРОСЫ ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ**

**УРАВНЕНИЯМ**

1. **Методы решения линейного дифференциального уравнения первого порядка. Найти одним из них общий интеграл заданного уравнения.**

*Определение.*Уравнение вида

, (1)

где *P (x)* и *Q (x)* – непрерывные функции *х*, называется линейным дифференциальным уравнением первого порядка.

В частности, если , такое уравнение называется *линейным однородным***.** Линейное однородное дифференциальное уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными:



или .

Решить линейное дифференциальное уравнение первого порядка можно двумя способами.

Метод вариации постоянной (метод Лагранжа).

Сначала решается соответствующее однородное уравнение

**,**

которое является уравнением с разделяющимися переменными:

****

****.

Считаем *С* функцией от *x*, то есть

****. (2)

Вычисляя производную

,

и подставляя её совместно с*у* в исходное уравнение, получим:



,

.

В результате, из (2) следует общее решение:

.

Метод Бернулли.

Общее решение линейного уравнения *y*можно представить в виде произведения двух пока изначально неизвестных функций: , одну из которых выбирают произвольно, а другую – в соответствии с исходным уравнением.

Обозначим для краткости: , . Тогда

 и .

Подставим выражения для *y* и в исходное уравнение:

,

 (3)

Выберем *u* так, чтобы в (3) выражение в скобках равнялось нулю, т.е.

 (4)

или .

Получили уравнение с разделяющимися переменными, которое легко интегрируется. При этом константу интегрирования в правой части полагают равной нулю. Тогда

. (5)

После нахождения*u*возвращаемся к уравнению (3), которое при условии (4) приобретает вид:



или, разделяя переменные, .

Тогда с учетом (5) ****.

Интегрирование полученного уравнения дает:

****.

С учетом (5) может быть записано и общее решение уравнения (1):

.

*Пример.*Найти общее решение уравнения

.

*Решение.*Метод Лагранжа.Решаем однородное уравнение

:

****

******

****** (\*)

Вычислим производную: и подставим совместно с******в исходное уравнение:



.

Разделяем переменные и интегрируем:

,

.

Тогда окончательно из (\*) получим

******.

*Решение.*Метод Бернулли. Представляем искомую функцию в виде произведения двух функций: *y = uv*. Тогда , и из заданного уравнения следует:



 (+)

Выражение в скобках полагаем равным нулю. В результате получаем:

,

.

Принимаем*С*= 0. Тогда

. (++)

Возвращаемся к уравнению (+):





Тогда (поскольку*y = uv*)с учетом (++) можем записать:



**Примеры для самостоятельного решения**

1. . *Ответ:*.

2.  . *Ответ:*.

3. . *Ответ:*.

1. **Функции, однородные относительно *х* и *у.* Найти общее решение (или общий интеграл) однородного дифференциального уравнения первого порядка**

*Определение.* Функция  называется *однороднойn*-го измерения относительно *x*и *y*, если для всех действительных значений > 0 онаудовлетворяет равенству

.

Число *n* называют также *степенью однородности.*

*Примеры:*

 – однородная функция измерения ;

 – однородная функция нулевого измерения ();– неоднородная функция.

*Определение.* Дифференциальное уравнение первого порядка

 (1)

называется *однородным***,** если его коэффициенты  и являются однородными функциями одного и того же измерения.

Из этого уравнения следует:



Т.к. и  – однородные функции одного измерения, то степень однородности равна нулю:

.

*Определение.*Уравнение

 (2)

называется *однородным,* если функция *f (x,y)* является однородной нулевого измерения относительно *x* и *y*.

В однородном уравнении функцию *f (x,y)* всегда можно представить как функцию одной переменной . Действительно, если ,

то, положив , получим

.

В результате, из (2) следует:

,

и очевидна замена  или . Но тогда , и из исходного уравнения будем иметь:

,

,

.

Получено уравнение с разделяющимися переменными, из которого следует общий интеграл

,

а после возвращения к исходным переменным, т.е. подстановки, приходим к общему интегралу однородного уравнения.

*Пример.* Решить уравнение.

*Решение.*Данное уравнение можно представить в виде:

.

Правая часть содержит только отношение вида , следовательно, уравнение является однородным.Найдем общее решение.



Подставляем в заданное уравнение:



,

.

Возвращаемся к исходным переменным:

,

.

**Примеры для самостоятельного решения**

1. . *Ответ:*;

2.  . *Ответ:*.

3. . *Ответ:*.

1. **В каком случае в дифференциальном уравнении первого порядка можно разделить переменные? Найти общий интеграл такого уравнения.**

*Определение.* Уравнение вида

, (1)

в котором коэффициенты при и  являются произведениями функций, зависящих только от одной из переменных –  или , называется *уравнением с разделяющимися переменными.*

В нормальной форме уравнение с разделяющимися переменными имеет вид:

, (2)

т.е. функция в правой части является произведением двух функций, одна из которых зависит только от, а другая – только от .

Из (1) непосредственно следует

,

и после интегрирования получаем общее решение (общий интеграл):

.

*Пример.*Найти общий интеграл уравнения

****

*Решение.* После преобразования



разделим переменные:



Полученное уравнение можно интегрировать:



Тогда  или  – общий интеграл.

**Примеры для самостоятельного решения**

1.  . *Ответ:*.

2.  . *Ответ:*.

3.  . *Ответ:*..

1. **Возможный видобщего решения линейного однородного дифференциального уравнения 4-го порядка с постоянными коэффициентами.**

**Решить заданное уравнение 4-го порядка**

Согласно теореме об общем решении линейного дифференциального уравнения общим решением уравнения

,

в котором – константы, является линейная комбинация,



4-хлинейнонезависимых частных решений с произвольными постоянными коэффициентами . При этом используются следующие этапы решения:

(1) Составляется характеристическое уравнение

.

(2) Находятся корни характеристического уравнения

.

(3) В зависимости от вида корней записываются частные линейно независимые решения по следующим правилам:

а) каждому действительному однократному корню  соответствует частное решение ;

б) каждому действительному корню  кратности  соответствует  линейно независимых частных решений

;

в) каждой паре комплексных сопряженных однократных корней



соответствуют два частных решения

 и ;

г) паре комплексных сопряженных корней



соответствует 4 частных решения:



В каждом случае число частных решений будет равно степени характеристического уравнения (т.е. порядку *п*линейного дифференциального уравнения).

(4) Найдя  линейно независимых частных решений , строим общее решение данного линейного уравнения:

,

где  – произвольные постоянные.

*Пример.*.

*Решение.*Записываем характеристическое уравнение и находим его корни:



 – действительный корень кратности 2;

 – действительный корень кратности 2.

Записываем общее решение:

.

**Примеры для самостоятельного решения**

1. ****. *Ответ:*.

2. **** . *Ответ:*.

3.****. *Ответ:*

1. **Теорема об общем решении линейного неоднородного дифференциального уравнения 2 порядка с постоянными коэффициентами. Вид частного решения для случая, когда правая часть – полином. Показать на предложенном примере.**

Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка (уравнение с правой частью):

. (1)

Здесь  и  – постоянные действительные числа.

Соответствующее (1) *однородное* уравнение

 (2)

называть*сопровождающим*для дифференциального уравнения (1).

*Теорема.Если  есть какое-либо частное решение уравнения* (1) *, и*

**(3)

*– общее решение его сопровождающего уравнения* (2) *, то их сумма*

**

*– есть общее решение дифференциального уравнения* (1) *.*

Решения  однородного уравнения (2) находится с помощью характеристического уравнения

. (4)

Пусть в уравнении (1) ,

где  – действительное число, а  – многочлен *n*-й степени от аргумента *х*.

Естественно предположить, что частное решение  будет иметь вид, аналогичный :

, (5)

где  – также полином *n* -й степени, зависящий от *х*.

Данные рассуждения требуют уточнения в 2-х частных случаях.

1. Уравнение не содержит функции (т.е.  ). Тогда один из корней характеристического уравнения (4) также равен нулю, и

. (6)

2. Уравнение не содержит функции и ее производной (т.е. ). Тогда оба корня характеристического уравнения (4) равны нулю, и

. (6)

*Пример.*.

*Решение. С*огласно теореме об общем решении

**.(\*)

1. Уравнение 

является сопровождающим для заданного. Его характеристическое уравнение 

имеет один кратный корень

,

и потому общее решение – есть функция

. (\*\*)

2. В правой части стоит полином третьего порядка

.

При этом. Значит, частное решение имеет вид полинома третьей степени:

.

Находим производные:

, .

Подставляем полученные выражения для в исходное уравнение:

,

.

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях левой и правой части, приходим к системе линейных уравнений для неопределенных коэффициентов :



Из этой системы находим:

Стало быть, функция



является частным решением заданного дифференциального уравнения. С учетом (\*) и (\*\*) запишем общее решение:



**Примеры для самостоятельного решения**

1.  . *Ответ:*.

2.  . *Ответ:*.

3.  . *Ответ:*.

**III. ВОПРОСЫ ПО ТФКП**

1. **Тригонометрическая форма комплексного числа. Модуль и аргумент комплексного числа и их свойства. Действия с комплексными числами в тригонометрической форме.**

**Найти все значения кубического корня из комплексного числа.**

Комплексным числом *z* называется выражение вида

(1)

где *x* и *y* - любые действительные числа.

*i* – мнимая единица, удовлетворяющая условию , *x* – действительная часть комплексного числа z, обозначающаяся , *y* – мнимая часть комплексного числа *z*, обозначающаяся .

Уравнение (1) выражает алгебраическую форму записи комплексного числа.

Комплексное числоизображается на плоскости XOY точкой M с координатами (*x,y*) либо вектором, начало которого находится в точке O(0,0), а конец в точке M(*x,y*).

*y*

*M(x,y)*

*r*

*x*

*Модулем комплексного числа* называется длина вектора и обозначается , где.

*Аргументомкомплексного числа*(обозначается называется угол , образованный вектором с осью OX . Он определяется не однозначно, а с точностью до слагаемого, кратного :

где есть главное значение , определяемое условием

причем

Модуль и аргумент комплексного числа удовлетворяют следующим свойствам:

1. , ,

2. - есть расстояние между двумя точками и

– есть угол наклона к положительному направлению оси абсцисс вектора идущего из точки в точку

3.

4.

5.

6.

7.

Любое комплексное число можно записать в тригонометрической форме

Возведение комплексного числа в натуральную степень производится по формуле

Отсюда получается формула Муавра:

Корень n-й степени из комплексного числа z имеет n различных значений, которые находятся по формуле

*Пример.*Выполнить действия

а) ;

б) .

*Решение.*

а) Чтобы возвести комплексное число в степень n воспользуемся следующей формулой:

, (1)

где ;

Рассмотрим число . Найдем модуль и главное значение аргумента этого числа.

,

.

По условию . Подставляя все найденные значения в формулу (1) получим:

.

б) n значений корня n-й степени из комплексного числа получим из формулы:

(2)

где ; .

Рассмотрим число . Найдем модуль и главное значение аргумента этого числа.

,

.

По условию . Подставляя все найденные значения в формулу (2) получим:

При

При

**Примеры для самостоятельного решения**

Выполнить действия:

1. *Ответ:* при

при

при

при

при

2. *Ответ:* при

при

3. *Ответ:* при

при

при

при

1. **Понятие функции комплексного переменного. Элементарные функции и их свойства. Формулы Эйлера.**

**Выделить действительную и мнимую части заданной функции**

Говорят, что в области D определена функция, если каждой точке ставится в соответствие одно (однозначная функция) или несколько (многозначная) значений w.

Т.е. геометрически функцияотображает точки комплексной плоскости z на соответствующие точки комплексной плоскости w.Если , а , то зависимость между комплексной функцией *w* и комплексной переменной *z* может быть описана с помощью двух функций двух действительных переменных

Показательная функция определяется как сумма абсолютно сходящегося во всей комплексной плоскости степенного ряда

*Свойства показательной функции*

*а)* , т.е. показательная функция комплексного переменного является периодической с периодом .

б) .

*Тригонометрические функции*

*sinz* и *cosz* определяются как суммы абсолютно сходящихся во всей комплексной плоскости степенных рядов

Для функций имеют место формулы Эйлера

Из этих формул

Функции *tgz* и *ctgz* определяются равенствами

*Пример.* Выделить действительную и мнимую части функции комплексного переменного .

*Решение.*Пусть . Тогда функция примет вид

*.*

Используем известную формулу тригонометрии *.*

*.*

Далее воспользуемся формулами, связывающими тригонометрические и гиперболические функции комплексного аргумента

,

Получим следующее

Таким образом, для функции действительная часть   
, мнимая часть .

*Ответ:*.

**Примеры для самостоятельного решения**

Выделить действительную и мнимую части функции комплексного переменного:

1. . *Ответ:*

2. . *Ответ:*

.

3. . *Ответ:*

.

1. **Понятие функции комплексного переменного. Элементарные функции . Многозначность функции .**

**Вычислить значение заданной функции.**

Говорят, что в области D определена функция, если каждой точке ставится в соответствие одно (однозначная функция) или несколько (многозначная) значений w.

Т.е. геометрически функцияотображает точки комплексной плоскости z на соответствующие точки комплексной плоскости w.Если , а , то зависимость между комплексной функцией *w* и комплексной переменной *z* может быть описана с помощью двух функций двух действительных переменных

*Логарифмическая функция* определяется как функция, обратная показательной, причем

Эта функция является многозначной. Главным значением является то значение, при котором . Оно обозначается:

.

*Свойства логарифма*

а)

б)

*Общая степенная функция* определяется равенством

Функция является многозначной. Ее главное значение равноОбщая показательная функцияопределяется равенствомФункция является многозначной. Ее главное значение равно

*Пример.*Вычислить указанные значения.

а) ; б)

*Решение*.

а) Воспользуемся следующей формулой

Т.к. , то

и

Такимобразом,

б) Полагая в формуле

, , получим

**Примеры для самостоятельного решения**

Вычислить:

1. а) . *Ответ:* а)

б) б)

2. а) *Ответ:* а)

б) б)

3. а) *Ответ:* а)

б) б)

1. **Производная функции комплексного переменного. Необходимые и достаточные условия дифференцируемости функции комплексного переменного. Условия Коши-Римана. Понятие аналитической функции.**

**Выяснить, является ли заданная функция аналитической на всей плоскости комплексного переменного.**

*Определение.* Функция называется дифференцируемой в точке , если отношение имеет конечный предел при , стремящемся к нулю произвольным образом. Этот предел называется производной функциив точке и обозначается .

Таким образом, по определению имеем

*Теорема.* Для того, чтобы функция в некоторой точке имела производную, необходимо и достаточно, чтобы в этой точке функции и имели полные дифференциалы и выполнялись условия *Коши-Римана*

при этом

*Определение*. Функцияназывается аналитической в данной точке, если она дифференцируема как в самой точке, так и в некоторой окрестности этой точки. Функция называется аналитической в области *D*, если она является аналитической в каждой точке этой области.

*Пример.*Показать, что функция является аналитической во всей комплексной плоскости

*Решение.*

Имеем. Таким образом

Функции как функции действительных переменных дифференцируемы в точке и удовлетворяют условиям Коши-Римана:

Следовательно, функция является аналитической во всей комплексной плоскости.

**Примеры для самостоятельного решения**

Выяснить, являются ли аналитическими на всей комплексной плоскости функции:

1. . Ответ: не является.

2. . Ответ: является.

3. . Ответ: не является.

4. Ответ: является

1. **Теорема Коши. Интегральная формула Коши для односвязной и многосвязной области.**

**Вычислить заданный интеграл с помощью интегральной формулы Коши**

*Основная теорема Коши*. Интеграл по замкнутой кривой *L* равен нулю, если кривая ограничивает односвязную область *D*, а подынтегральная функция аналитическая не только внутри этой области, но и в области *D’*, содержащей внутри себя область *D* и ее границу *L*.

*Теорема Коши для многосвязной области.* Если область*D* ограничена конечным числом кусочно-гладких кривых , а функция аналитическая внутри области *D’*, содержащей *D* и ограничивающие ее кривые, то интеграл по внешнему контуру *L* равен сумме интегралов по внутренним контурам , где эти контуры обходятся противчасовой стрелки.

Если функция аналитическая в области *D*, ограниченной кусочно-гладким замкнутым контуром *L*, и на самом контуре, то справедлива интегральная формула Коши

где контур *L* обходится так, чтобы область *D* оставалась все время слева.

Интегральная формула позволяет вычислять некоторые интегралы, а именно

*Пример.* Вычислить интеграл с помощью интегральной формулы Коши.

*Решение.*

Если функцияявляется аналитической в области *D*, ограниченной кусочно-гладким замкнутым контуром *L*, и на самом контуре, то имеет место интегральная формула Коши

Внутри окружности знаменатель функции равен нулю в двух точках . Внутри окружности лежит только точка Поэтому можно непосредственно применить интегральную формулу Коши.

Функция является аналитической в данной области, поэтому, согласно формуле Коши имеем

.

**Примеры для самостоятельного решения.**

. *Ответ:*.

. *Ответ:*.

. *Ответ:* 0.

1. **Ряд Лорана. Теорема Лорана.**

**Разложить заданную функцию в ряд Лорана в кольце.**

*Определение.* Ряд вида

в котором присутствуют как положительные, так и отрицательные степени , а коэффициенты вычисляются по формуле

где контур *L* есть окружность с центром в точке , целиком лежащая в некотором заданном кольце, называется рядом Лорана.

В формуле (\*) ряд

называется *главной частью ряда Лорана*, а ряд

называется *правильной частью ряда Лорана*.

Справедлива следующая теорема.

*Теорема Лорана.*Функцию, аналитическую в кольце , можно разложить в ряд Лорана по степеням , сходящийся во всех точках кольца, причем это разложение единственно.

На практике при нахождении коэффициентов ряда Лорана коэффициенты не вычисляют по формулам, а поступают следующим образом:

функциюаналитическую в кольце , стараются представить в виде суммы двух функций одна из которых аналитическая внутри большего круга , другая – вне меньшего , используя готовые разложения

Указанные ряды сходятся при .

*Пример.*Разложить функцию ряд Лорана в кольце.

*Решение.*Особыми точками функции являются .

Представим функцию в виде суммы элементарных дробей

Внутри окружности ряд для функции будет сходящимся для .

Поэтому

Вне окружности ряд для функции будет сходящимся для .

Поэтому

Таким образом, получим

**Примеры для самостоятельного решения.**

. *Ответ:*

*Ответ:*

*Ответ:*

**ЛИТЕРАТУРА ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ**

**Учебники**

1. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. – М., Наука, 1968 –1986, т. 1 – 3.

2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. – М., Наука, 1966, т. 1, 2.

3. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа.- М., Наука,1973.

4. Кудрявцев Л.Д. Математический анализ. – М., Высшая школа,1973, т. 1, 2,

5. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Б.Л. Математический анализ. – М., Наука, 1979.

6. Кудрявцев Л.Д., Математический анализ, т.1, 2, М., «Высшая школа», 1973.

7. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики.- М., Наука, 1978.

8. Зорич В.А., Математический анализ, М., «Наука», т.1 – 1981 г., т.2 – 1984 г.

9. Гелбаум Б., Олмстед Дж., Примеры в анализе, М., «Мир», 1967.

10. Ильин В.А., Позняк Э.Г., Основы математического анализа, М., «Наука», т.1 – 1971 г., т.2 – 1980 г.

11. Никольский С.М., Курс математического анализа, т.1, 2, М., «Наука», 1973.

12. Фихтенгольц Г.М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 1 – 3, М., «Наука», 1969.

13. Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.Ч., Медведев Г.Н., Шишкин А.А., Математический анализ в вопросах и задачах, ч. 1, 2, М., «Высшая школа», 1988.

14. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я., Высшая математика в упражнениях и задачах, М., «Высшая школа», 1986.

15. Запорожец Г.Н., Руководство к решению задач по математическому анализу, М., «Высшая школа», 1966.

16. Математический анализ в примерах и задачах, Киев, «Вища школа», 1974.

17. Шипачев В.С. Основа высшей математики.- М. Высшая школа, 1989.

18. Власов В.Г. Конспект лекций по высшей математике. – М., Айрис,1996.

19. Крамор В.С. Повторяем и систематизируем школьный курс алгебры и начал анализа. – М., Просвещение, 1989.

**Сборники задач**

1. Задачник по курсу математического анализа. – Под ред. Виленкина В.Я., М., Просвещение, 1971,ч. 1,2.

2. ДемидовичБ.П.Задачи и упражнения по математическому анализу.-M.,Высшая школа.1978.

3. Берман Г.Н. Сборник задач по математическому анализу.– М., Наука, 1964 – 1980.

4. ШипачевВ.С.Задачи по высшей математике.-M.,Высшая школа.1997

5. Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. Задачи и упражнения по математическому анализу, ч.1, 2, М., «Высшая школа», 2000

**ЛИТЕРАТУРА**

**ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ**

1. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. – М., 1953.
2. Матвеев Н.М. Дифференциальные уравнения. – М., 1965.
3. Школьник А.Г. Дифференциальные уравнения. – М., 1963.
4. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения. – М., 1963.
5. Виленкин Н.Я. Дифференциальные уравнения. – М., 1984.
6. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Для втузов. – М., 1982.

**ЛИТЕРАТУРА ПО ТФКП**

1. Морозова В.Д. Теория функций комплексного переменного. - М.: Изд.МГТУим.Н.Э.Баумана, 2009.
2. Сидоров Ю.В., Шабунин М.И., Федорюк М.В. Лекции по теории функций комплексного переменного.- М.: Наука, 1976.
3. Хапланов М.Г. Теория функций комплексного переменного, (краткий курс), М.: Просвещение, 1965.
4. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Функции комплексного переменного: задачи и примеры с подробными решениями. - М.:УРСС, 2003.
5. Волковысский Л.И., Лунц Г.Л., Араманович И.Г. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.